Das Fermat’sche Prinzip

Thomas Peters
Thomas’ Mathe-Seiten
www.mathe-seiten.de

31. August 2003

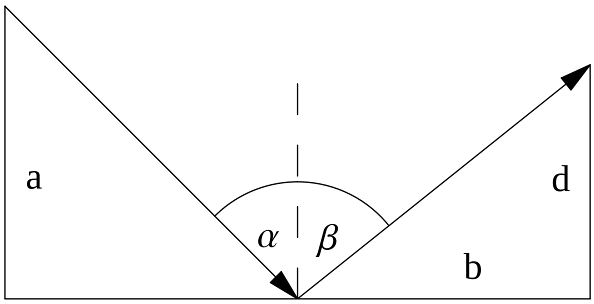

Abbildung 1.1: Skizze zum Reflexionsgesetz

Das *Fermat'sche Prinzip* besagt, dass Licht unter mehreren möglichen Wegen immer genau den Weg auswählt, unter dem die Lichtlaufzeit minimal wird. Da zurückgelegter Weg s und benötigte Zeit t durch die einfache Proportionalität $s = c \cdot t$ verbunden sind, wobei c die Lichtgeschwindigkeit ist, ist das Fermat'sche Prinzip äquivalent zu der Aussage, dass das Licht zwischen zwei Punkten immer den kürzesten Weg nimmt. Dieses Prinzip ist das wahrscheinlich einfachste *Variationsprinzip*. In der Variationsrechnung wird untersucht, unter welchen Bedingungen Funktionen extremal werden. Im Falle des Fermat'schen Prinzips geht es um die Minimierung der Laufzeit in Abhängigkeit vom gewählten Weg. Über dieses Prinzip lässt sich das Reflexions- und Brechungsgesetz sehr einfach herleiten.

Reflexion

Betrachtet werden zwei Punkte $P_1 = (0|a)$ und $P_2 = (e|d)$, wobei die Strecke e in die Teilstrecken x_0 und b zerlegt werden kann, wenn x_0 der Reflexionspunkt ist. Von P_1 möge ein Lichtstrahl ausgehen. Die Frage ist nun, welchen Weg der Lichtstrahl nimmt, wenn er vor der Ankunft bei P_2 noch an der x-Achse reflektiert werden soll. Dazu nehmen wir an, dass sich beide Punkte in einem homogenen Medium befinden mögen, so dass sich die Lichtgeschwindigkeit nicht ändert. Die Länge des Weges hängt mit der Nebenbedingung, an der x-Achse reflektiert werden zu müssen, allein vom Reflexionspunkt x ab. Dieser Weg hat allgemein die Länge

$$s(x) = \sqrt{x^2 + a^2} + \sqrt{(x-b)^2 + d^2}.$$

Um zu ermitteln, für welchen Wert x_0 dieser Weg minimal wird, bestimmen wir die erste Ableitung

$$s'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} + \frac{x-b}{\sqrt{(x-b)^2 + d^2}}.$$

Für x_0 muss $s'(x_0) = 0$ sein, oder anders ausgedrückt

$$\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + a^2}} = \frac{b - x_0}{\sqrt{(x_0-b)^2 + d^2}}.$$

An Abbildung 1.1 sieht man, dass dies nichts anderes besagt als $\sin\alpha = \sin\beta$ oder $\alpha = \beta$.

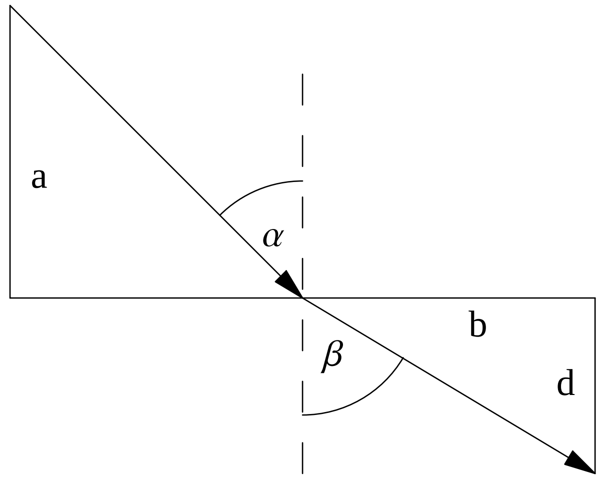

Abbildung 1.2: Skizze zum Brechungsgesetz

Brechung

Wir betrachten nun die etwas modifizierte Situation $P_1 = (0|a)$ und $P_2 = (e| - d)$. Oberhalb und unterhalb der x-Achse mögen sich zwei verschiedene homogene Medien befinden mit der Lichtgeschwindigkeit c_1 oberhalb und c_2 unterhalb der x-Achse. Dabei spielt es keine Rolle, welcher Wert nun der größere ist. Wieder hängt der zurückgelegte Weg nur davon ab, an welcher Stelle x_0 die x-Achse überschritten wird. Da wir aber nun verschiedene Lichtlaufzeiten oberhalb und unterhalb der x-Achse haben, betrachten wir nicht mehr den Weg, sondern die benötigte Zeit. Diese ergibt sich aus

$$t(x) = \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{c_1} + \frac{\sqrt{(x-b)^2 + d^2}}{c_2}.$$

Ableiten ergibt

$$t'(x) = \frac{x}{c_1\sqrt{x^2 + a^2}} + \frac{x-b}{c_2\sqrt{(x-b)^2 + d^2}}.$$

Für x_0 gilt nun wieder

$$\frac{x_0}{c_1\sqrt{x_0^2 + a^2}} = \frac{b - x_0}{c_2\sqrt{(x_0-b)^2 + d^2}}$$

bzw.

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{c_1}{c_2}.$$

Doch woher weiß das Licht, welcher Weg der schnellste ist?